构造专题分享

保证知识点在 NOI 大纲的提高组范围内

TonyYin

2022.06.19

北京亦庄实验中学

目录

T1

题意

X 和 Y 各有一个权值 v_x, v_y，现在从最低位开始依次比较。

比如 $v_x = 137$，$v_y = 47$。

用 X 代表小 X 暂时领先，Y 代表小 Y 暂时领先，那么可以写下一个字符串 XY。如果我们再用 Z 表示小 X 与小 Y 的点赞数暂时一样，那么写下的字符串应该为 XYZ。

给定最后的字符串 s_i，请构造一种可能的 $(v_x v_y)$。

若不存在构造方案，输出 -1.

为了方便输出，用前导零补足位数。

$s_i \in \{X, Y, Z\}$，$1 \leq \text{len}(s) \leq 10^6$。

题解

如果 Z 不是连续的后缀，则无解。

否则用 $0/1$ 构造即可。

T2

题意

给定正整数 n，请找出一个合法的三元组 (x, y, z)，满足：

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{n}$$

要求： $x, y, z \in \mathbb{Z}^+$ 且互不相同。

$1 \leq n \leq 10^4$.

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$$

那就直接 $z=n$，则有：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$$

题解

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$$

那就直接 $z=n$，则有：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$$

考虑裂项公式：

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

因此：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

于是得到：

$$\begin{cases} x=n+1 \\ y=n(n+1) \\ z=n \end{cases}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{n}+\frac{1}{n}$$

那就直接 $z=n$，则有：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n}$$

考虑裂项公式：

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}$$

因此：

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n(n+1)}$$

于是得到：

$$\begin{cases} x=n+1 \\ y=n(n+1) \\ z=n \end{cases}$$

当 $n=1$ 时，$x=y=n+1$，无解。否则构造如上。

T3

题意

给定一个长度为 n 的数组 a。

你需要确定一个范围 $[x, y]$，并将 a 数组分成 k 段，使得对于每一段，在范围 $[x, y]$ 以内的不同元素个数**大于**在范围 $[x, y]$ 以外的不同元素个数。

此处的 x, y 都是权值，不是下标。

请求出任意一组使得 $(y - x)$ 最小的 x, y，并输出划分的方案。

数据范围：

- t 组数据，$1 \leqslant t \leqslant 3 \times 10^4$。
- $1 \leqslant k \leqslant n \leqslant 2 \times 10^5$，$\sum n \leqslant 2 \times 10^5$。
- $1 \leqslant a_i \leqslant n$。

题解

对于这道题，**最根本的问题**是最小化的 $(y-x)$，**而具体的形式**是如何划分整个序列。

我们可以发现，如果同时考虑这两个问题，事情会变得非常复杂，难以下手。

所以我们不妨暂且扔下具体的形式，去考察最根本的问题。

题解

对于这道题，**最根本的问题**是最小化的 $(y-x)$，**而具体的形式**是如何划分整个序列。

我们可以发现，如果同时考虑这两个问题，事情会变得非常复杂，难以下手。

所以我们不妨暂且扔下具体的形式，去考察最根本的问题。

性质：划分为 k 段时，在 $[x,y]$ 内的数总体上至少要比在此区间以外的数多 k 个。

证明：每个段内至少多一个，一共多至少 k 个。

做法：

题解

对于这道题，**最根本的问题**是最小化的 $(y-x)$，**而具体的形式**是如何划分整个序列。

我们可以发现，如果同时考虑这两个问题，事情会变得非常复杂，难以下手。

所以我们不妨暂且扔下具体的形式，去考察最根本的问题。

性质：划分为 k 段时，在 $[x,y]$ 内的数总体上至少要比在此区间以外的数多 k 个。

证明：每个段内至少多一个，一共多至少 k 个。

做法：

先将整个序列从小到大排序，然后用一个大小为 $n-\lfloor\frac{n-k}{2}\rfloor$ 的滑动窗口去检测。

窗口两端的数就是 $[x,y]$，取 $(y-x)$ 的最小值即可确定 $[x,y]$。

题解

对于这道题，**最根本的问题**是最小化的 $(y-x)$，**而具体的形式**是如何划分整个序列。

我们可以发现，如果同时考虑这两个问题，事情会变得非常复杂，难以下手。

所以我们不妨暂且扔下具体的形式，去考察最根本的问题。

性质：划分为 k 段时，在 $[x,y]$ 内的数总体上至少要比在此区间以外的数多 k 个。

证明：每个段内至少多一个，一共多至少 k 个。

做法：

先将整个序列从小到大排序，然后用一个大小为 $n-\lfloor\frac{n-k}{2}\rfloor$ 的滑动窗口去检测。

窗口两端的数就是 $[x,y]$，取 $(y-x)$ 的最小值即可确定 $[x,y]$。

推理一下可以发现，让每一段都多一个，可以使滑动窗口尽可能小，这样 $(y-x)$ 也会相应更小，同时这样的一组 $[x,y]$ 一定有可行的划分方案。

最后构造方案时也是每一段多一个就划开即可。

T4

题意

https://ac.nowcoder.com/acm/contest/11251/D

小红想让你构造一个长度不超过 200000 的字符串，其中包含 k 个 red 子序列。你能帮帮她吗？

子序列的定义：在原串中必须按顺序，可以不连续。例如，$reddd$ 有 3 个：$\underline{red}dd$，$\underline{re}de\underline{d}$，$\underline{r}ed\underline{ed}$.

若无法构造，输出 -1，多解输出任意。

数据范围：$0 \leq k \leq 10^{14}$.

题解

考虑字符串：

$$rererererererere\ldots$$

在第一个 re 后面加 x 个 d，可稳定增加 x 个子序列；

在第二个 re 后面加 x 个 d，可稳定增加 $3x$ 个子序列；

以此类推，

在第 k 个 re 后面加 x 个 d，可稳定增加

考虑字符串：

$$rerererererere\ldots$$

在第一个 re 后面加 x 个 d，可稳定增加 x 个子序列；

在第二个 re 后面加 x 个 d，可稳定增加 $3x$ 个子序列；

以此类推，

在第 k 个 re 后面加 x 个 d，可稳定增加 $\frac{k\cdot(k+1)}{2}x$ 个子序列。

于是把字符串长度缩小到 $n^{\frac{1}{3}}$ 级别，可以证明这样的长度一定小于 200000.

T5

题意

Task1：**试判断能否构造并构造一个长度为** n **的** $1 \ldots n$ **的排列**，**满足其** n **个前缀和在模** n **的意义下互不相同。若存在**，**请给出一种构造方案。**

Task2：**试判断能否构造并构造一个长度为** n **的** $1 \ldots n$ **的排列**，**满足其** n **个前缀积在模** n **的意义下互不相同。若存在**，**请给出一种构造方案。**

测试点类型 1：10 **分**，**满足** $X = 1$，$1 \le n \le 10$。
测试点类型 2：40 **分**，**满足** $X = 1$，$1 \le n \le 10^5$。
测试点类型 3：10 **分**，**满足** $X = 2$，$1 \le n \le 10$。
测试点类型 4：40 **分**，**满足** $X = 2$，$1 \le n \le 10^5$。

题解

设序列为 a_i，分别讨论两个子任务。

设 $s_i = (\sum_{j=1}^{i} a_i) \bmod n$，可以有如下发现：

设 $s_i = (\sum_{j=1}^{i} a_i) \bmod n$，可以有如下发现：

1. $\forall l, r, s_l \equiv s_r \pmod{n}$ 当且仅当 $s_r - s_{l-1} \equiv 0 \pmod{n}$. 因此不存在区间 $[l, r]$ 的区间和是 n 的倍数。

设 $s_i = (\sum_{j=1}^{i} a_i) \bmod n$，可以有如下发现：

1. $\forall l, r, s_l \equiv s_r \pmod{n}$ 当且仅当 $s_r - s_{l-1} \equiv 0 \pmod{n}$. 因此不存在区间 $[l, r]$ 的区间和是 n 的倍数。
2. 当 $a_i = n$ 时，$i = 1$.

设 $s_i = (\sum_{j=1}^{i} a_i) \bmod n$，可以有如下发现：

1. $\forall l, r, s_l \equiv s_r \pmod{n}$ 当且仅当 $s_r - s_{l-1} \equiv 0 \pmod{n}$. 因此不存在区间 $[l, r]$ 的区间和是 n 的倍数。
2. 当 $a_i = n$ 时，$i = 1$.
3. 若 $2 \nmid n$ 且 $n \neq 1$，无解。

接下来对有解情况进行构造。

发现 n 必定为偶数，要想让 s 构成 $\bmod n$ 意义下的完全剩余系。

发现 n 必定为偶数，要想让 s 构成 $\bmod n$ 意义下的完全剩余系。考虑把所有偶数在模意义下取相反数。

也就是说，使：

$$s = \{0, 1, -2, 3, -4, 5, \cdots, n-1\}$$

注意到，所有偶数的符号为负，再加上 n 变为正数后，仍为偶数，所以 s 仍然满足题意。

发现 n 必定为偶数，要想让 s 构成 $\bmod n$ 意义下的完全剩余系。考虑把所有偶数在模意义下取相反数。

也就是说，使：

$$s = \{0, 1, -2, 3, -4, 5, \cdots, n-1\}$$

注意到，所有偶数的符号为负，再加上 n 变为正数后，仍为偶数，所以 s 仍然满足题意。则有 a_i 的通项公式：

$$a_i = \begin{cases} n - i + 1, & 2 \mid i \\ i - 1, & 2 \nmid i \end{cases}$$

注意 $a_1 = n \neq 0$.

设 $s_i = (\prod_{j=1}^{i} a_i) \bmod n$，可以有如下发现：

设 $s_i = (\prod_{j=1}^{i} a_i) \bmod n$，可以有如下发现：

1. $\forall l, r, s_l \equiv s_r \pmod n$ 当且仅当 $\frac{s_r}{s_{l-1}} \equiv 0 \pmod n$. 因此不存在区间 $[l, r]$ 的区间积是 n 的倍数。
2. 当 $a_i = n$ 时，$i = n$.
3. 当 $a_i = 1$ 时，$i = 1$.

设 $s_i = (\prod_{j=1}^{i} a_i) \bmod n$，可以有如下发现：

1. $\forall l, r, s_l \equiv s_r \pmod n$ 当且仅当 $\frac{s_r}{s_{l-1}} \equiv 0 \pmod n$. 因此不存在区间 $[l, r]$ 的区间积是 n 的倍数。
2. 当 $a_i = n$ 时，$i = n$.
3. 当 $a_i = 1$ 时，$i = 1$.
4. 当 n 为合数时（4 除外），$n \mid (n-1)!$，所以 $s_{n-1} \equiv s_n \pmod n$，无合法方案。

接下来对有解情况进行构造。

因此序列开头为 1，末尾为 n，n 为质数，想到 $s_i = i$ 是否可行？

因此序列开头为 1，末尾为 n，n 为质数，想到 $s_i = i$ 是否可行？下面在 $s_{i-1} + 1 \equiv s_i \pmod{n}$ 的情况下构造：

$$
\begin{aligned}
s_{i-1} + 1 &\equiv s_{i-1} \times a_i &\pmod{n} \\
s_{i-1} \times (a_i - 1) &\equiv 1 &\pmod{n} \\
a_i &= \mathrm{inv}(s_{i-1}) + 1 &\pmod{n}
\end{aligned}
$$

于是可以从头开始递推完成构造。

T6

题意

给你 n 个**整点**和它们的坐标，现在给它们**分成两组**并两两连上边。

对于每条边，如果两端的点在：**同一组则边为黄色，不同组则为蓝色**。

现在让你给出任意一种分组方案，使得所有长度相同的边颜色相同。

保证存在合法方案。

$2 \le n \le 10^3$，$|x_i|, |y_i| \le 10^6$.

将点分为黑色和白色两组。

考虑对格子黑白染色，**坐标和为偶数的染为黑色**。

将点分为黑色和白色两组。

考虑对格子黑白染色，**坐标和为偶数的染为黑色**。若两种颜色的点都存在，则：

黄色边的边长平方一定是奇数，蓝色边的边长平方一定是偶数，满足题目条件。

直接按黑白颜色分组即可。

下面讨论只存在一种颜色的点的情况。

题解-只存在一种颜色的点

不妨设**只存在黑点**，因为只有白点，就可以全部下移一格，转化为黑点。

如果所有点的两维坐标都是偶数，则可以直接 $\div 2$，但我们只保证了 $2 \mid (x+y)$.

想要转化到让 $(x+y)$ 既有奇数又有偶数，过程中不改变点之间的位置关系。

题解-只存在一种颜色的点

不妨设**只存在黑点**，因为只有白点，就可以全部下移一格，转化为黑点。

如果所有点的两维坐标都是偶数，则可以直接 $\div 2$，但我们只保证了 $2 \mid (x + y)$.

想要转化到让 $(x + y)$ 既有奇数又有偶数，过程中不改变点之间的位置关系。注意到 $2 \mid (x + y) \Rightarrow 2 \mid (x - y)$.

题解-只存在一种颜色的点

不妨设**只存在黑点**，因为只有白点，就可以全部下移一格，转化为黑点。

如果所有点的两维坐标都是偶数，则可以直接 $\div 2$，但我们只保证了 $2 \mid (x+y)$.

想要转化到让 $(x+y)$ 既有奇数又有偶数，过程中不改变点之间的位置关系。注意到 $2 \mid (x+y) \Rightarrow 2 \mid (x-y)$. 并且想到旋转和缩放都可以保证点间位置关系不变。

联想到坐标旋转公式：

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta \end{cases}$$

若旋转 45 度，则有：

$$\begin{cases} x' = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ y' = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{cases}$$

我们只想看到整数，

若旋转 45 度，则有：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x - \dfrac{\sqrt{2}}{2}y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x-y) \\ y' = \dfrac{\sqrt{2}}{2}x + \dfrac{\sqrt{2}}{2}y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \end{cases}$$

我们只想看到整数，于是让：

$$\begin{cases} x' = \dfrac{x-y}{2} \\ y' = \dfrac{x+y}{2} \end{cases}$$

这样进行若干次，最终一定会使黑白点均存在。

分为了黑白点就可以由之前的方法解决，否则继续递归。

递归的次数为 $\mathcal{O}(\log A)$ 次，其中 A 为坐标值域大小。

THANKS